PART3 2 直線の交点

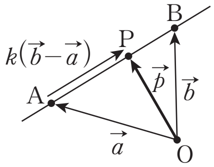
要点 ① 2 直線の交点

異なる 3 点 A，B，P が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する。

このとき，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると

$$\vec{p}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$$

$$\vec{p}=\vec{a}+k(\vec{b}-\vec{a})=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}=\frac{(1-k)\vec{a}+k\vec{b}}{k+(1-k)}$$

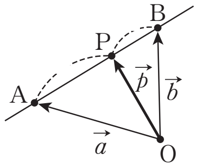


よって，$0<k<1$ のとき，点 P は線分 AB を　　：　　に

内分する点であり，その位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$$

と表すことができる。

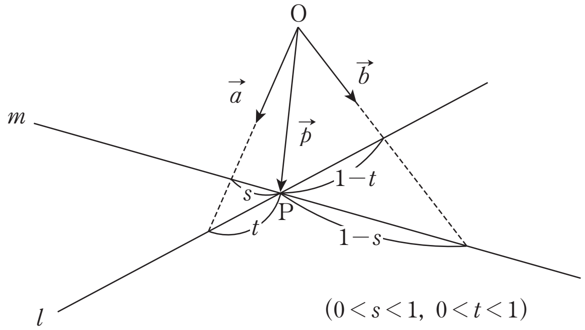


$0<k<1$ のとき

また，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき($\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立であるとき)，任意のベクトル $\vec{p}$ は，実数 s, t を用いて $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で，ただ 1 通りに表すことができる。よって，次のことが成り立つ。

$$m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b} \iff m=m',\ n=n'$$

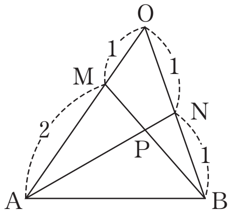
以上より，2 直線の交点を表す位置ベクトルを，1 次独立である 2 つのベクトルを用いて 2 通りに表し，その係数を比較することで求めることができる。



$(0<s<1,\ 0<t<1)$

[MEMO]

3 △OAB において，辺 OA を 1：2 に内分する点を M，辺 OB の中点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



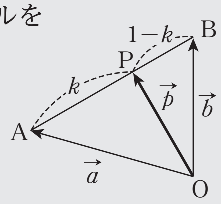
Point Pickup

線分を内分する点の位置ベクトル

線分 AB を内分する点 P について，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると

$$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}\quad(0<k<1)$$

と表される。このとき，AP：PB＝k：$(1-k)$ である。



2 直線の交点の位置ベクトル

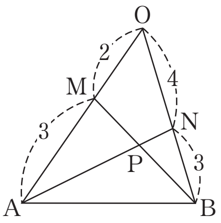
$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき（$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が 1 次独立であるとき），2 直線の交点を表す位置ベクトル $\vec{p}$ を，2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

の形で 2 通りに表し，その係数を比較することで求める。

第 4 講　PART3 確認問題

1 △OAB において，辺 OA を 2：3 に内分する点を M，辺 OB を 4：3 に内分する点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



AP：PN $=s:(1-s)$ とおいて，$\overrightarrow{OP}$ を s，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OP}=\boxed{\text{ア}}\,\vec{a}+\boxed{\text{イ}}\,\vec{b}\quad\cdots\cdots①$$

である。

また，BP：PM $=t:(1-t)$ とおいて，$\overrightarrow{OP}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OP}=\boxed{\text{ウ}}\,\vec{a}+\boxed{\text{エ}}\,\vec{b}\quad\cdots\cdots②$$

である。

①，②より

$$s=\boxed{\text{オ}},\quad t=\boxed{\text{カ}}$$

したがって，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\vec{b}$$

である。

[ア , イ の選択肢]

① $\frac{3}{7}(1-s)$　② $\frac{4}{7}(1-s)$　③ $(1-s)$

④ $\frac{3}{7}s$　⑤ $\frac{4}{7}s$　⑥ s

[ウ , エ の選択肢]

① $\frac{2}{5}(1-t)$　② $\frac{3}{5}(1-t)$　③ $(1-t)$

④ $\frac{2}{5}t$　⑤ $\frac{3}{5}t$　⑥ t

[オ , カ の選択肢]

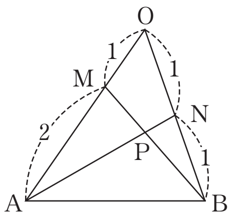
① $\frac{2}{9}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{5}{9}$

④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{7}{9}$　⑥ $\frac{8}{9}$

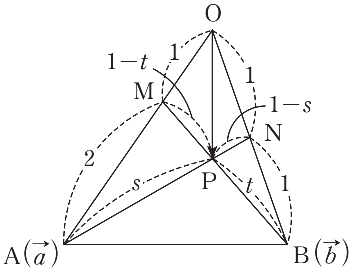
[MEMO]

PART3　2 直線の交点

3　△OAB において，辺 OA を 1：2 に内分する点を M，辺 OB の中点を N とし，線分 AN と線分 BM の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



[解答]



AP：PN＝s：$(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{ON}$$

$$=(1-s)\vec{a}+s\times\frac{1}{2}\vec{b}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}\ \cdots\cdots ①$$

BP：PM＝t：$(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$

$$=t\times\frac{1}{3}\vec{a}+(1-t)\vec{b}=\frac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\ \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}=\frac{1}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから

$$1-s=\frac{1}{3}t,\quad \frac{1}{2}s=1-t$$

これを解くと

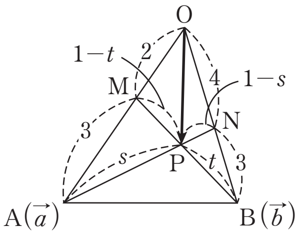
$$s=\frac{4}{5},\quad t=\frac{3}{5}$$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

第4講 PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：③，イ：⑤，ウ：④，エ：③，オ：⑤，
カ：③，キ：2，ク：9，ケ：4，コ：9

[解説]



AP：PN＝s：$(1-s)$ とおくと [A]

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{ON}$$
$$=(1-s)\vec{a}+s\times\frac{4}{7}\vec{b}$$
$$=\boldsymbol{(1-s)\vec{a}+\frac{4}{7}s\vec{b}}\quad\cdots\cdots①$$

BP：PM＝t：$(1-t)$ とおくと [A]

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OM}+(1-t)\overrightarrow{OB}$$
$$=t\times\frac{2}{5}\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}}\quad\cdots\cdots②$$

①，②より

$$(1-s)\vec{a}+\frac{4}{7}s\vec{b}=\frac{2}{5}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でないから [B]

$$1-s=\frac{2}{5}t,\quad \frac{4}{7}s=1-t$$

これを解くと

$$\boldsymbol{s=\frac{7}{9},\quad t=\frac{5}{9}}$$

したがって

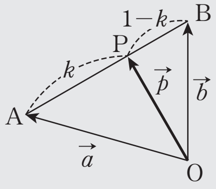
$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}}$$

[A] 線分ABを内分する点Pについて，3点A，B，Pの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると

$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}\quad(0<k<1)$

と表される。このとき，

AP：PB＝k：$(1-k)$ である。



[B] $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，2直線の交点を表す位置ベクトル $\vec{p}$ を，2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$

の形で2通りに表し，その係数を比較することで求める。